

**बिहार लोक सेवा आयोग मुख्य परीक्षा**

# **सांख्यिकी**

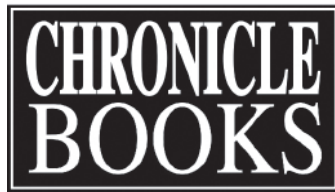
## **एक सरल अध्ययन**

**संपादक**

एन.एन. ओझा

**लेखन एवं प्रस्तुति**

क्रॉनिकल संपादकीय समूह



[www.chronicleindia.in](http://www.chronicleindia.in)

# बिहार लोक सेवा आयोग

## सांख्यिकी: एक सरल अध्ययन

बुक कोड: 021

ISBN: 978-81-950712-3-4

संस्करण 2022

मूल्य: ₹225/-

### प्रकाशक

#### क्रॉनिकल बुक्स

(क्रॉनिकल पब्लिकेशंस प्रा. लि. का पुस्तक प्रभाग)

#### कॉर्पोरेट ऑफिस:

ए-27डी, सेक्टर-16, नोएडा-201301,

फोन नं: 0120-2514610-12,

E-mail : info@chronicleindia.in

#### संपर्क सूत्र:

संपादकीय : 9582948817, editor@chronicleindia.in

ऑनलाइन सेल सहयोग: 9582219047, onlinesale@chronicleindia.in

तकनीकी सहयोग : 9953007634, Email Id: it@chronicleindia.in

विज्ञापन : 9953007627, advt@chronicleindia.in

सदस्यता : 9953007629, Subscription@chronicleindia.in

प्रिंट संस्करण सेल : 9953007630, circulation@chronicleindia.in

**सर्वाधिकार सुरक्षित** © क्रॉनिकल पब्लिकेशंस प्रा. लि.: इस प्रकाशन के किसी भी अंश का प्रतिलिपिकरण, ऐसे यंत्र में भंडारण जिससे इसे पुनः प्राप्त किया जा सकता हो या स्थानान्तरण, किसी भी रूप में या किसी भी विधि से- इलेक्ट्रॉनिक, यांत्रिक, फोटो-प्रतिलिपि, रिकॉर्डिंग या किसी और ढंग से, प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना नहीं किया जा सकता।

**डिस्क्लेमर:** पुस्तक में प्रकाशित सामग्री उपरोक्त विषय पर प्रकाशित पुस्तकों/जर्नल/रिपोर्ट/ऑनलाइन कंटेंट आदि से संकलित है। लेखक/संकल. नकर्ता/प्रकाशक, प्रकाशित सामग्री की मूल लेखन का दावा नहीं करता। प्रकाशित सामग्री को पूर्णतः त्रुटि रहित बनाने का प्रयास किया गया है, फिर भी किसी भी प्रकार के त्रुटि के लिए क्षतिपूर्ति का दावा प्रकाशक/लेखक द्वारा स्वीकार नहीं किया जाएगा। प्रस्तुत सामग्री प्रतियोगिता परीक्षाओं की तैयारी के लिए है, शोध आदि कार्य के लिए मानक मूल पुस्तकों का संदर्भ लें। किसी भी शंका की स्थिति में पाठक स्वयं भारत सरकार के दस्तावेज व अन्य स्रोतों के माध्यम से जांच कर सकते हैं।

सभी विवादों का निपटारा दिल्ली न्यायिक क्षेत्र में होगा।, **पंजीकृत कार्यालय:** एच-31, जी.पी. एक्सटेंशन, नई दिल्ली-110016,

**मुद्रक:** डिजाइन व प्रिंट सर्विसेज, नोएडा, उ.प्र.-201301

# अनुक्रमणिका

## CONTENTS

1. विषय प्रवेश .....	1-3
2. समकों का संकलन व वर्गीकरण.....	4-26
3. समकों का प्रस्तुतिकरण .....	27-122
4. केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप.....	123-162
5. अपकिरण के माप.....	163-189
6. सह-संबंध.....	190-209
7. प्रतीपगमन विश्लेषण.....	210-222
8. गुण-सम्बन्ध.....	223-234
9. आंतरगणन व बाह्यगणन .....	235-244
10. प्रायिकता सिद्धांत .....	245-258
11. तार्किक तथ्यों पर आधारित प्रश्न.....	259-270
12. विविध .....	271-298
13. 47वीं-66वीं बीपीएससी मुख्य परीक्षा हल .....	299-334



## विषय प्रवेश INTRODUCTION

“सांख्यिकी के अंतर्गत ज्ञान-विज्ञान के किसी भी प्रभाग से संबंधित तथ्यों के संख्यात्मक संकलन, संक्षेपण, प्रस्तुतिकरण उनका वैज्ञानिक विश्लेषण और तर्क पूर्ण निष्कर्ष निकालने संबंधी विधियों का विधिवत अध्ययन किया जाता है। लैटिन शब्द ‘स्टैटस’ (Status), इटैलियन शब्द ‘स्टैटिस्टा’ (Statista) और जर्मन शब्द ‘स्टैटिस्टिक’ (Statistik) से उद्धृत अंग्रेजी शब्द ‘स्टैटिस्टिक्स’ अर्थात् ‘सांख्यिकी’ का प्रयोग बहुवचन और एकवचन दो अर्थों में किया जाता है।

**बहुवचन** में सांख्यिकी का तात्पर्य समकों या आंकड़ों से होता है, जो क्षेत्र विशेष से संबंधित संख्यात्मक विवरण होते हैं, यथा - राष्ट्रीय आय, जनसंख्या, कीमत-स्तर, कृषि व औद्योगिक उत्पादन आदि के समंक या आंकड़े। **डॉ. बाउले** के अनुसार, “अनुसंधान के किसी विभाग से संबंधित तथ्यों के संख्यात्मक विवरण को समंक कहते हैं, जिन्हें एक-दूसरे के सम्बन्ध में प्रस्तुत किया जा सके।” ध्यातव्य है कि सभी संख्यात्मक तथ्य समंक नहीं होते, लेकिन समस्त सांख्यिकीय समंक संख्यात्मक तथ्य होते हैं। समकों की कुछ प्रमुख विशेषताएँ निम्नवत् हैं-

1. समंक, संख्या में व्यक्त किये जाते हैं और तथ्यों के समूह होते हैं। किसी एक तथ्य से संबंधित अंक, समंक नहीं कहा जाता, क्योंकि उससे कोई समुचित निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता है।
2. समकों का संकलन व संग्रहण किसी पूर्व निश्चित उद्देश्य के लिए किया जाता है। उद्देश्य रहित आंकड़े समंक नहीं कहलाते।
3. समकों के संग्रहण में यथोचित परिशुद्धता आवश्यक होती है और यह परिशुद्धता अनुसंधान के उद्देश्य, उसकी प्रकृति, आकार एवं उपलब्ध साधनों पर निर्भर होती है।
4. समंक विविध कारणों से प्रभावित होते हैं। यथा, कृषि-उत्पादन के समकों पर जलवायु, वर्षा, सिंचाई,

भूमि की उर्वरता, बीज, उर्वरक आदि उनके कारणों का प्रभाव पड़ता है।

5. समकों का संकलन एक निश्चित योजना के तहत सुव्यवस्थित रीति द्वारा किया जाना चाहिए; क्योंकि अव्यवस्थित रूप से एकत्रित तथ्यों से तर्कसंगत निष्कर्ष निकालना सम्भव नहीं होता।
6. समंक एक-दूसरे से संबंधित रूप में प्रस्तुत किये जाने चाहिए, क्योंकि सजातीयता एवं तुलना के गुण न होने से वे निरर्थक ही होंगे।

एकवचन के रूप में सांख्यिकी का तात्पर्य उस सांख्यिकी विज्ञान से है, जिसके अंतर्गत समकों या आंकड़ों के संग्रहण विश्लेषण एवं निर्वचन से संबंधित क्रियाओं अथवा सांख्यिकीय विधियों के सम्यक अध्ययन से होता है। **प्रो. सेलिगमैन** के अनुसार “सांख्यिकी वह विज्ञान है, जो किसी विषय पर प्रकाश डालने के उद्देश्य से संकलित किये गये आंकड़ों के संग्रहण, वर्गीकरण, प्रदर्शन, तुलना और व्याख्या करने की रीतियों का विवेचन करता है।”

**निष्कर्षतः** सांख्यिकी एक विज्ञान और कला दोनों है, जो सामाजिक, आर्थिक, प्राकृतिक व अन्य समस्याओं से संबंधित समकों के संग्रहण, वर्गीकरण, सारणीयन, प्रस्तुतिकरण, सम्बन्ध स्थापन, निर्वचन एवं पूर्वानुमान से संबंध रखता है, जिससे पूर्व निर्धारित उद्देश्य की पूर्ति की जा सके।

### विकास एवं महत्त्व

सांख्यिकी की उत्पत्ति ‘राजाओं के विज्ञान’ या ‘राज्यशिल्प विज्ञान’ के रूप में हुई। अतीत में सांख्यिकी का प्रयोग राज्य के शासन प्रबंध को सुगमतापूर्वक संचालित करने के लिए किया जाता था। उस समय सांख्यिकी की उपयोगिता राज्य तक सीमित थी और समय-समय पर इसका प्रयोग राज्य की जनसंख्या, भूमि, लगान, खाद्यान्न आदि से संबंधित आंकड़ों को

## 2 सांख्यिकी : एक सरल अध्ययन

एकत्र करने में किया जाता था। इससे यह पता लगाया जाता था कि आवश्यकता पड़ने पर कितने सैनिक एकत्र किये जा सकते हैं अथवा कर के रूप में कितनी आय प्राप्त की जा सकती है। सर्वप्रथम मिस्र के सम्राट ने 3050 ई. पूर्व पिरामिड के निर्माण हेतु जनसंख्या एवं धन वितरण संबंधी आंकड़े एकत्र कराया था। भारत में मनुस्मृति, शुक्र नीति और कौटिल्य के 'अर्थशास्त्र' में भी शासन संबंधी आंकड़ों एवं उनको एकत्र करने की विधियों का उल्लेख मिलता था।

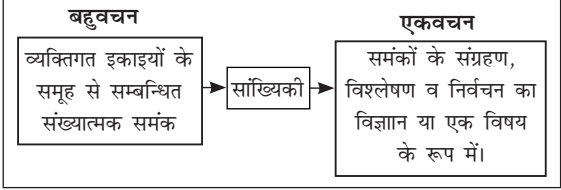
'स्टैटिस्टिक्स' शब्द का प्रयोग सर्वप्रथम 1749 ई. में जर्मन गणितज्ञ **गाटफ्रायड एकेनवाल** ने किया, जिन्हें 'सांख्यिकी का जन्मदाता' भी कहा जाता है। मानव सभ्यता के विकास के साथ-साथ इस विषय के प्रयोग, उपयोगिता एवं क्षेत्र में निरंतर वृद्धि हो रही है। आज ज्ञान-विज्ञान का कोई भी ऐसा क्षेत्र नहीं है, जहां इसकी विधियों का प्रयोग न होता हो। राज्य की शासन व्यवस्था से संबंधित दशाओं का विवरण हो या जनसंख्या उत्पादन, आयात-निर्यात, राष्ट्रीय आय इत्यादि के पर्याप्त समकों का एकत्रण व विश्लेषण, देश की आर्थिक योजना का निर्माण हो या व्यापार, उद्योग एवं वाणिज्य से संबंधित समकों का अध्ययन-इन सबमें सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग अवश्यम्भावी हो गया है। यहां तक कि समाजशास्त्र, शिक्षा, मनोविज्ञान, भौतिकी व रसायनशास्त्र, जीवविज्ञान, नक्षत्र-विज्ञान, चिकित्साशास्त्र आदि अनेक विज्ञानों में सांख्यिकीय विवेचन नितांत आवश्यक है। इस प्रकार, आजकल सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग आरेखीय कलाओं से लेकर नक्षत्र भौतिकी तक तथा संगीत रचना से लेकर प्रक्षेपास्त्र निर्देशन तक किया जाने लगा है। वस्तुतः मानव ज्ञान-विज्ञान की कोई ऐसी शाखा-प्रशाखा नहीं है, जहाँ सांख्यिकी और उसकी गणना विधियों की उपादेयता सिद्ध न हो, **वाँकर** का मानना है कि "एक आश्चर्यजनक सीमा तक हमारी संस्कृति सांख्यिकी संस्कृति बन चुकी है।"

### सांख्यिकी की सीमाएँ

सांख्यिकी, अनुसंधान का एक महत्त्वपूर्ण साधन है; परन्तु इसकी कुछ सीमाएँ भी हैं, जिन्हें हटाया जाना सम्भव नहीं है। अतः इन पर विचार करना आवश्यक है। साथ ही, इन सीमाओं पर ध्यान दिया जाना भी आत्यांतिक है, नहीं तो परिणाम भ्रामक व त्रुटिपूर्ण होंगे। इसकी प्रमुख सीमाएँ निम्नलिखित हैं—

1. सांख्यिकी समूहों का अध्ययन करती है, न कि व्यक्तिगत इकाइयों का; यथा सांख्यिकी द्वारा मूल्य स्तर का अध्ययन किया जाता है, न कि किसी वस्तु के मूल्य का।
2. सांख्यिकी सदैव परिमाणात्मक तथ्यों का अध्ययन करती है, गुणात्मक तथ्यों का नहीं है।

केंडाल व बुकलैण्ड ने 'ए डिक्शनरी ऑफ स्टैटिस्टिकल टर्म्स' में सांख्यिकी शब्द को निम्न प्रकार सुस्पष्ट किया है:



3. सांख्यिकी के निष्कर्ष भ्रामक व असत्य सिद्ध हो सकते हैं, यदि उनका अध्ययन संदर्भ के बिना किया जाये।
4. सांख्यिकीय नियम औसत रूप में तथा दीर्घकाल में ही सत्य होते हैं।
5. सांख्यिकीय आंकड़ों का सजातीय होना आवश्यक है।
6. सांख्यिकी का प्रयोग वही कर सकता है, जिसको इसकी विधियों व रीतियों का पूर्ण ज्ञान हो।
7. सांख्यिकी केवल साधन मात्र है, समस्या का समाधान (साध्य) नहीं।

### सांख्यिकी का क्षेत्र

अतीत में सांख्यिकी का क्षेत्र अत्यंत सीमित था, लेकिन वर्तमान समय में इसका प्रयोग अत्यधिक विस्तृत हो गया है। वस्तुतः आज ज्ञान-विज्ञान की कोई भी ऐसी शाखा नहीं है, जहाँ साधन के रूप में सांख्यिकी एवं इसकी विधियों का प्रयोग न होता हो। अध्ययन की सुविधा की दृष्टि से सांख्यिकी के क्षेत्र को निम्न दो भागों में वर्गीकृत किया जा सकता है:

- (क) सांख्यिकीय विधियाँ (Statistical Methods)
- (ख) व्यावहारिक सांख्यिकी (Applied Statistics)

(क) **सांख्यिकी विधियाँ:** सांख्यिकी विधियाँ वे प्रक्रियाएँ हैं, जो समकों के संग्रहण, संगठन, संक्षिप्तीकरण, विश्लेषण, निर्वचन एवं प्रस्तुतिकरण में प्रयुक्त होती हैं। इनके माध्यम से किसी भी अनुसंधान क्षेत्र में आंकिक तथ्यों एवं समकों का विश्लेषण करके उन्हें सरल एवं बोधगम्य बनाया जाता है, ताकि उनकी परस्पर तुलना की जा सके और उनके उचित निष्कर्ष निकाले जा सकें। महत्त्वपूर्ण सांख्यिकीय विधियाँ निम्नवत् हैं—

1. **समकों का संकलन (Collection of data):** सर्वप्रथम सांख्यिकीय अनुसंधान में समकों को एक निश्चित योजनानुसार उपयुक्त रीति से संकलित किया जाता है। ध्यातव्य है कि समंक दो प्रकार के होते हैं— प्राथमिक व द्वितीयक। प्राथमिक समंक अनुसंधानकर्ता द्वारा प्रारम्भ से अंत तक नये सिरे से एकत्र किये जाते हैं, जबकि द्वितीयक समंक पहले से ही अन्य व्यक्तियों व संस्थाओं द्वारा एकत्रित एवं प्रकाशित होते हैं; जिनका प्रयोग अनुसंधानकर्ता अपने उद्देश्य के लिए करता है।

## समकों का प्रस्तुतिकरण PRESENTATION OF DATA

समकों के संकलन और विधिवत वर्गीकरण के उपरांत उनके उचित विश्लेषण एवं निर्वचन हेतु समुचित प्रस्तुतिकरण की आवश्यकता होती है। इसकी अनुपस्थिति में सम्भव है कि तत्संबंधी बहुत-सी सूचनाएं छिपी रह जायें और उन आंकड़ों से यथोचित निष्कर्ष नहीं निकाले जा सकें। **क्रॉक्सटन व काउडेन** का मत है कि निश्चित उद्देश्यों की प्राप्ति के लिए समकों को किसी उपयुक्त रूप में प्रस्तुत करना चाहिए।

सामान्यतः समंक या तो सारणियों में क्रमबद्ध किये जाते हैं अथवा आरेखीय युक्तियों द्वारा उनका चित्रण किया जाता है। वास्तव में, सांख्यिकीय तथ्यों से कहीं अधिक महत्व उन्हें प्रस्तुत करने के स्वरूप का होता है। इस प्रकार, समकों का प्रस्तुतिकरण निम्न प्रकार से किया जा सकता है-

- (क) सारणीयन (Tabulation)
- (ख) बिन्दु रेखाचित्र (Graphs)
- (ग) चित्र (Digrams)

### सारणीयन (Tabulation)

सारणीयन वर्गीकृत आंकड़ों को सरल, संक्षिप्त और सुबोध बनाने के लिए सारणियों व तालिकाओं में प्रस्तुत करने की क्रिया है। इसके अंतर्गत समकों को पंक्तियों (Rows) तथा स्तम्भों (Columns) में व्यवस्थित रूप से क्रमबद्ध किया जाता है। पंक्तियां क्षैतिज (Horizontal) और स्तम्भ लम्बवत (Vertical) होते हैं। सैक्राइस्ट के अनुसार, “सारणियां, वर्गीकरण द्वारा किये गये विश्लेषण को स्थायी रूप में लेखबद्ध करने तथा समान एवं तुलनीय सामग्रियों की परस्पर निकटता को उचित स्थान पर रखने के साधन हैं।”

### उत्तम सारणी के लक्षण

1. सारणी का आकार न ही बहुत बड़ा होना चाहिए और न ही बहुत छोटा। साथ ही, सारणी में बहुत अधिक तथ्यों

को समाहित भी नहीं करना चाहिए। सारणी का आकार बहुत बड़ा होने पर भ्रमात्मक स्थिति उत्पन्न हो जाती है तथा उसकी पंक्तियों एवं स्तम्भों को समझना कठिन हो जाता है।

2. सारणी अनुसंधान के उद्देश्य के संगत होना चाहिए।
3. सारणियों की रचना इस प्रकार करना चाहिए, जिससे कि समकों की तुलना सरल हो।
4. समकों का सारणी में प्रस्तुतिकरण सुनियोजित एवं वैज्ञानिक आधार पर होना चाहिए, ताकि एक सामान्य व्यक्ति भी उसे स्पष्टतः समझ सके।
5. सारणी आकर्षक होनी चाहिए। साथ ही, सारणी के खाने इस प्रकार बनाये जाने चाहिए कि वे समकों के महत्व के अनुरूप हों तथा उनकी विशेषताएं भली प्रकार से प्रकट हो जायें।

### सारणी के प्रमुख भाग

1. **सारणी शीर्षक (Title of the Table):** सर्वप्रथम सारणी का शीर्षक होता है, जिससे समकों की प्रकृति क्षेत्र, समयदि के बारे में एक नजर में ही सूचना प्राप्त हो जाये। शीर्षक पूर्ण, स्पष्ट, संक्षिप्त एवं उचित होना चाहिए, क्योंकि इसी से सारणी में प्रस्तुत सामग्रियों का पता चलता है।
2. **उपशीर्षक व अनुशीर्षक (Captions & Stubs):** उदग्र स्तम्भों के उपशीर्षक एवं क्षैतिज पंक्तियों के अनुशीर्षक स्पष्ट व संक्षिप्त होते हैं तथा उनमें प्रयुक्त सांख्यिकीय एकक का भी उल्लेख होता है। सारणी के प्रत्येक स्तम्भों एवं पंक्तियों में समावेशित समकों के योग की व्यवस्था भी होती है।
3. **सारणी का मुख्य भाग (Main Body of Table):** सारणी का मुख्य भाग अथवा कलेवर में सांख्यिकीय

सूचनायें प्रदान की जाती हैं। इसके अंतर्गत सामग्रियों को स्तम्भों और पंक्तियों के अनुसार प्रस्तुत किया जाता है। आंकड़ों के अनुसार इसका प्रारूप पहले से ही तैयार कर लिया जाता है।

4. **पदों की व्यवस्था (Arrangement of Items):** सारणी के प्रारूप में स्तम्भों एवं पंक्तियों को उचित ढंग से क्रमबद्ध करके उनमें विभिन्न समकों को यथोचित विधि से लिख दिया जाता है। तुलना योग्य समकों को समीपवर्ती स्तम्भों में रखा जाता है। पदों की व्यवस्था आवश्यकतानुसार वर्णमाला, समय, महत्व, आकार, रीति-रिवाज या स्थानिक आधार पर की जाती है।
5. **टिप्पणी (Footnotes):** सारणी में दिये गये अंकों या शब्दों के स्पष्टीकरण के लिए कभी-कभी सारणी के नीचे एक संक्षिप्त व्याख्यात्मक टिप्पणी दी जाती है। परंतु, सारणी को यथासम्भव पूर्ण होना चाहिए, ताकि टिप्पणी की सहायता न लेनी पड़े।
6. **समकों का स्रोत (Source of data):** सारणी के नीचे समकों के स्रोत का भी उल्लेख किया जा सकता है, ताकि संकलित समकों से संबंधित यदि कोई संदेह या त्रुटि हो, तो उसे दूर किया जा सके या सुधारा जा सके।

**सारणी शीर्षक**  
स्तम्भ

पंक्ति	पंक्ति शीर्षक	स्तम्भ शीर्षक			
		उपशीर्षक	उपशीर्षक	---	योग
	अनुशीर्षक				
	-----				
	-----				
	-----				
	योग				

टिप्पणी:

स्रोत:

**सारणी रचना के सामान्य नियम या मुख्य सावधानियां**

- (i) सारणी का शीर्षक सुस्पष्ट, संक्षिप्त एवं पूर्ण होना चाहिए, जिससे प्रदत्त सामग्रियों का पूर्ण विवरण प्राप्त हो सके।
- (ii) सारणी की पंक्तियों एवं स्तम्भों में समकों को वर्णमाला, समय, भौगोलिक स्थिति, प्रथा व रीति-रिवाज के अनुसार व्यवस्थित किया जाना चाहिए।
- (iii) माप की इकाई को सम्यक् रूप से परिभाषित की जानी चाहिए तथा सारणी में उसका यथास्थान उल्लेख भी किया जाना चाहिए। यथा-आय रूपों में, लम्बाई सेंटीमीटर में, भार किलोग्राम में, समय वर्ष में आदि।

- (iv) विशेष महत्व के समकों को मोटे अक्षरों, कोष्ठक अथवा वृत्त में लिखना चाहिए अथवा उनके नीचे एक मोटी या पतली रेखा खींच देनी चाहिए।
- (v) सारणी में अनावश्यक बातों का उल्लेख नहीं करना चाहिए। यदि प्रस्तुत की जाने वाली सामग्रियां अधिक हों, तो एक से अधिक सारणियां बनायी जा सकती हैं, लेकिन प्रत्येक सारणी पूर्ण एवं किसी विशेष उद्देश्य के लिए हो।
- (vi) तुलनीय समकों की पंक्तियों या स्तम्भों को पास-पास रखना चाहिए।
- (vii) यदि आवश्यक हो तो संख्याओं के प्रतिशत तथा अनुपात ज्ञात कर लेना चाहिए, ताकि संख्याएं अधिक आकर्षक व महत्वपूर्ण लगें।
- (viii) सारणियों में योग एवं अन्तयोग (Total and sub-total) का इस प्रकार आयोजन करना चाहिए कि स्तम्भों एवं पंक्तियों के योग की एक-दूसरे से स्वतः जांच हो जाये। इससे अशुद्धियों का सुगमता से पता लगाया जा सकता है।
- (ix) यदि कोई आवश्यक सूचना सारणी में प्रस्तुत होने से वंचित रह गयी हो अथवा किसी समक के विषय में स्पष्टीकरण देना हो, तो उस निमित्त सारणी के नीचे टिप्पणी दे देनी चाहिए। इसके साथ ही सारणी के नीचे समकों के स्रोत का भी उल्लेख कर देना चाहिए।
- (x) जब सारणी के किसी खाने के लिए समक किसी भी कारण से उपलब्ध न हों, तो उस स्थान पर --, x या N.A. (Not Available) लिख देना चाहिए।

**उदाहरण:** अधोलिखित सूचना एक उपयुक्त सारणी के रूप में व्यवस्थित कीजिये: Z “खाद्यान्न जांच समिति ने पूर्वी उत्तर प्रदेश और उत्तर प्रदेश के शेष भाग में कृषि जोतों के आकार का तुलनात्मक अध्ययन इस प्रकार किया- उत्तर प्रदेश के 14 पूर्वी जिलों में 2 एकड़ से कम क्षेत्रफल वाली जोतों का अनुपात सभी प्रकार की जोतों के कुल क्षेत्रफल (12,280 हजार एकड़) का 20% है, जबकि शेष उत्तर प्रदेश के लिए तत्संबंधी आंकड़ा 29,036 हजार एकड़ और 11% है। इसी प्रकार, 2 एकड़ से अधिक और 5 एकड़ तक क्षेत्रफल वाली जोतों का अनुपात 14 पूर्वी जिलों के लिए कुल क्षेत्रफल का 29% तथा शेष उत्तर प्रदेश के लिए केवल 3% है। इसके विपरीत 5 एकड़ से अधिक क्षेत्रफल वाली जोतों का प्रतिशत 14 जिलों की तुलना में शेष उत्तर प्रदेश में कहीं अधिक है।”

**हल:** उपर्युक्त विवरण में दो विशेषताओं का विवेचन किया गया है- प्रथम, जोतों का आकार तथा द्वितीय, उत्तर प्रदेश के दो भाग-14 पूर्वी जिले एवं शेष उत्तर प्रदेश। इनसे संबंधित क्षेत्रफल एवं प्रतिशत का भी उल्लेख किया गया है। सारणी

## आंतरगणन व बाह्यगणन INTERPOLATION AND EXTRAPOLATION

समकों का विश्लेषण एवं निर्वचन करते समय कभी-कभी प्रदत्त समंक श्रेणी पूर्ण नहीं होती, जबकि समकों से सम्यक् एवं सार्थक निष्कर्ष निकालने के लिए समंक श्रेणी के पूर्ण एवं अज्ञात मूल्यों को ज्ञात करना आवश्यक होता है। अतः उपलब्ध समकों के आधार पर भावी मूल्यों का पूर्वानुमान लगाया जाता है। प्रदत्त समंक श्रेणी के बीच के अज्ञात मूल्यों अथवा भावी मूल्यों के सांख्यिकीय अनुमान लगाने हेतु **आंतरगणन और बाह्यगणन** की विधियों का प्रयोग किया जाता है। कुछ निश्चित परिकल्पनाओं और मान्यताओं के तहत ज्ञात समकों के आधार पर समंक श्रेणी के मध्य किसी अज्ञात मूल्य का अनुमान लगाने की प्रक्रिया को **आंतरगणन (Interpolation)** कहा जाता है। इसके विपरीत, उपलब्ध समकों के आधार पर कुछ परिकल्पनाओं के अंतर्गत किसी भावी समंक के अनुमान की प्रक्रिया **बाह्यगणन (Extrapolation)** कहलाती है। इस प्रकार, आंतरगणन प्रदत्त श्रेणी के मध्य की रिक्तियों की पूर्ति में उपयोगी होता है, जबकि बाह्यगणन श्रेणी के बाहर अर्थात् किसी भावी मूल्य के अनुमान में सहायक होता है।

देश के प्रायः समस्त क्षेत्रों में आंतरगणन एवं बाह्यगणन की क्रियाओं का महत्त्व उल्लेखनीय है।

यह सर्वविदित है कि भारतीय जनगणना प्रत्येक 10 वर्षों के उपरांत होती है। लेकिन यदि किसी विशेष उद्देश्य के लिए मध्य के वर्षों की जनसंख्या ज्ञात करनी हो, तो आंतरगणन की सहायता ली जा सकती है। इतना ही नहीं, आधुनिक व्यवसाय तो प्रायः अनुमानों एवं सम्भाव्यता पर आधारित हो गया है। फलतः ज्ञात सामग्री के आधार पर मांग, उत्पादन आदि में भविष्य में होने वाले परिवर्तनों का सही अनुमान लगाना परमावश्यक हो गया है। इन विधियों की सहायता से अर्थशास्त्री मूल्य-स्तर, राष्ट्रीय आय, उत्पादन आदि के भावी अनुमान लगाते हैं, योजनाकर्ता विभिन्न

योजनागत लक्ष्यों को सुनिश्चित करते हैं तथा सरकार विभिन्न अनुमानों के आधार पर कर नीति, मूल्य नीति, मौद्रिक नीति, औद्योगिक नीति इत्यादि का निर्धारण करती है। इस प्रकार, आंतरगणन एवं बाह्यगणन की विधियां अर्थव्यवस्था और समाज के प्रत्येक क्षेत्र के अनुसंधानकर्ताओं के लिए अत्यंत ही उपयोगी होती है।

### आंतरगणन व बाह्यगणन की विधियां

आंतरगणन एवं बाह्यगणन की विधियों को बिन्दुरेखीय और बीजगणितीय दो भागों में विभक्त किया जाता है। बीजगणितीय विधि के तहत विभिन्न रीतियों का प्रयोग किया जाता है, लेकिन यहाँ बिन्दुरेखीय विधि के अतिरिक्त द्विपद विस्तार विधि, न्यूटन की प्रगामी अंतर विधि तथा लैंगरेंज विधि का उल्लेख किया जायेगा।

### बिन्दुरेखीय विधि (Graphic Method)

आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की यह सबसे सरल रीति है। इस रीति के अनुसार स्वतंत्र चर मूल्यों (यथा, समय या वर्ग-सीमाएं) को क्षैतीज रेखा अर्थात् X-अक्ष पर तथा आश्रित मूल्यों (यथा, समय से सम्बद्ध मूल्य या आवृत्तियां) को उदग्र रेखा अर्थात् Y-अक्ष पर अंकित करके रेखाचित्र पर विभिन्न बिन्दु प्राप्त कर लिये जाते हैं। इन बिन्दुओं को मिला देने से वक्र उपलब्ध हो जाता है। जिस समय (या वर्ग-सीमा) के लिए मूल्य का आन्तरगणन करना हो, X-अक्ष पर उस समय-बिन्दु से वक्र पर लम्ब डाला जाता है तथा यह लम्ब को जहाँ स्पर्श करता है, उस बिन्दु से Y-अक्ष पर लम्ब खींच दिया जाता है। अन्त में, कोटि-अक्ष पर दूसरे लम्ब के स्पर्श स्थान के मूल्य का माप पढ़ लिया जाता है। यही आन्तरगणितीय मूल्य होता है। बाह्यगणन करने के लिए उपर्युक्त विधि द्वारा वक्र की रचना कर ली जाती है। फिर उस वक्र के उच्चावचन

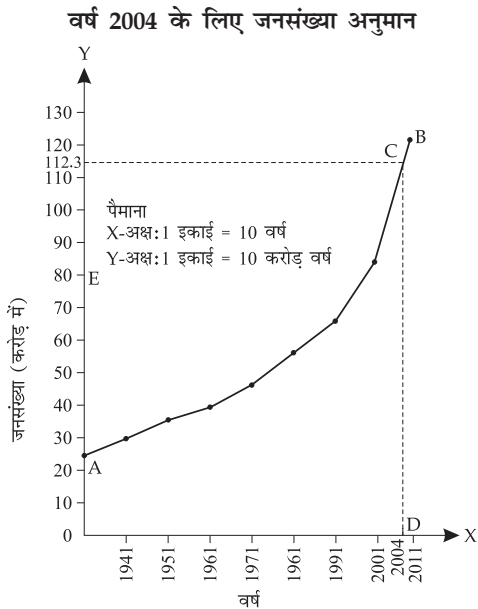


व गति का अध्ययन करके उसे पूर्व-क्रम के अनुसार आगे बढ़ा दिया जाता है और लम्ब डाल कर सम्भावित मूल्य का अनुमान कर लिया जाता है।

**उदाहरण:** वर्ष 1941 से 2001 तक की भारत की दशकीय जनगणना के आधार पर भारत की जनसंख्या निम्न तालिका में उल्लिखित है। उन समकों के आधार पर बिन्दुरेखीय विधि से वर्ष 1994 की जनसंख्या आंतर-गणित कीजिए।

वर्ष	1941	1951	1961	1971	1981	1991	2001	2011
जनसंख्या (करोड़)	27.9	31.9	36.9	43.9	54.9	68.9	84.4	121.08

**हल:** उपर्युक्त आंकड़ों के बिन्दुरेखीय प्रदर्शन के लिए X-अक्ष पर वर्ष को तथा Y-अक्ष पर जनसंख्या को प्रदर्शित करने पर,



उपर्युक्त चित्र में, X-अक्ष से 2004 के D बिन्दु से वक्र AB पर DC लम्ब डाला गया। तदुपरान्त C बिन्दु से Y-अक्ष पर एक लम्ब CE डाला गया। यह लम्ब Y-अक्ष को E बिन्दु पर स्पर्श करता है, जिसका मान 112.3 है। इस प्रकार, बिन्दुरेखीय चित्र से यह स्पष्ट है कि वर्ष 2004 में भारत की जनसंख्या 112.3 करोड़ थी।

**द्विपद विस्तार विधि**

**(Binomial Expansion Method)**

यह विधि द्विपद प्रमेय पर आधारित है। इस विधि का प्रयोग तब किया जाता है, जब स्वतंत्र चर (X) के पद समान अंतर से बढ़ते हों तथा समान अंतर वाले पदों में से ही X से संबंधित Y के मूल्य का अनुमान लगाना हो। स्वतंत्र चर

के पदों को क्रमानुसार  $x_0, x_1, x_2, x_3 \dots$  तथा आश्रित चर के मूल्यों को क्रमशः  $y_0, y_1, y_2, y_3 \dots$  आदि संकेताक्षरों से प्रकट किया जाता है। इस विधि के तहत Y के जितने ज्ञात मूल्य होते हैं, उतने क्रम के प्रमुखांतर को शून्य मान लिया जाता है। यथा, यदि सात पद ज्ञात हैं तो सातवां प्रमुखांतर शून्य होगा अर्थात्  $\Delta_7^7 = 0$

ज्ञात मूल्यों की संख्या के अनुरूप प्रमुखांतर को शून्य मानते हुए, उसका द्विपद विस्तार निम्न सूत्र द्वारा लिखा जाता है और इसके आधार पर x के संगत y के मूल्यों को ज्ञात कर लिया जाता है।

$$\Delta_0^n = (y - 1)^n = y^n - ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} y^{n-2} -$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3} y^{n-3} + \dots = 0$$

कुछ द्विपद विस्तार निम्न प्रकार हैं-

ज्ञात मूल्यों की संख्या	मूल सूत्र	द्विपद विस्तार
2	$\Delta^2 = (y - 1)^2 = 0$	$y_2 - 2y_1 + y_0 = 0$
3	$\Delta^3 = (y - 1)^3 = 0$	$y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = 0$
4	$\Delta^4 = (y - 1)^4 = 0$	$y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 = 0$
5	$\Delta^5 = (y - 1)^5 = 0$	$y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0$
6	$\Delta^6 = (y - 1)^6 = 0$	$y_6 - 6y_5 + 15y_4 - 20y_3 + 15y_2 - 6y_1 + y_0 = 0$

**दो अज्ञात मूल्य (Two missing values):** जब स्वतंत्र चर मूल्यों (x's) के अन्तर समान हो और दो अज्ञात मूल्यों (y's) का आन्तरगणन करना हो, तो दो समीकरणों की आवश्यकता होती है। **प्रथम**, ज्ञात मूल्यों की संख्या के बराबर प्रमुख अन्तर को शून्य मान कर द्विपद-विस्तार लिखा जाता है। **दूसरे**, उक्त द्विपद-विस्तार को फिर से लिख कर प्रत्येक y उपसंकेत (subscript) में 1 की वृद्धि कर देते हैं, जिससे अन्त में  $y_0$  के स्थान पर  $y_1$  प्राप्त हो जाता है। तत्पश्चात् ज्ञात मूल्यों को दोनों समीकरणों में प्रतिस्थापित करके अज्ञात मूल्य आनुमानित कर लिये जाते हैं। उदाहरणार्थ, यदि 5 मूल्य ज्ञात हो और 2 अज्ञात मूल्यों का आन्तरगणन करना हो, तो निम्न दो समीकरण बनाये जायेंगे:

$$\Delta_0^5 = y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0 \quad \dots(i)$$

$$\Delta_1^5 = y_6 - 5y_5 + 10y_4 - 10y_3 + 5y_2 - y_1 = 0 \quad \dots(ii)$$

अब इन दोनों द्विपद समीकरणों की सहायता से दो अज्ञात मूल्यों का अनुमान लगाया जा सकता है।

**उदाहरण:** निम्न श्रेणी में आंतरगणन द्वारा अज्ञात मूल्य का अनुमान लगाइये।

## सांख्यिकी विश्लेषण आलेख और चित्रण

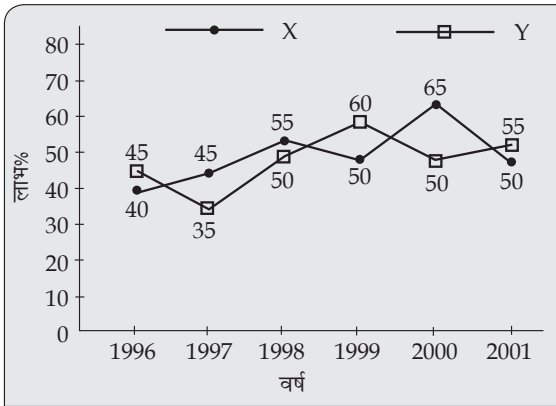
47वीं-66वीं बीपीएससी मुख्य परीक्षा हल

प्रश्न: निम्न रैखिक ग्राफ दो कंपनियों X तथा Y का 1996-2001 वर्षों के दौरान अर्जित किए गए प्रतिशत लाभ को प्रदर्शित करता है। ग्राफ का अध्ययन कर इस पर आधारित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

66वीं बीपीएससी मुख्य परीक्षा, 2021

दिए गए वर्षों के दौरान X तथा Y कंपनियों के अर्जित लाभ प्रतिशत

$$\% \text{ लाभ/हानि} = \frac{\text{आय} - \text{व्यय}}{\text{व्यय}} \times 100$$



(क) यदि वर्ष 1997 में Y कंपनी का व्यय ₹ 220 करोड़ था, तो 1997 में उसकी आय कितनी थी?

(ख) यदि वर्ष 1997 में दोनों कंपनियों की आय बराबर थी, तो 1997 में X कंपनी का Y कंपनी के सापेक्ष व्यय का अनुपात क्या था?

(ग) दोनों कंपनियों X तथा Y का वर्ष 2000 में आय का अनुपात क्रमशः 3:4 रहा हो, तो वर्ष 2000 में उनके व्यय का अनुपात क्या था?

(घ) वर्ष 1996 में X तथा Y दोनों कंपनियों का व्यय बराबर था तथा दोनों कंपनियों की कुल आय वर्ष 1996

में ₹ 342 करोड़ थी, तो 1996 में उन दोनों कंपनियों का कुल लाभ कितना था?

(ङ) वर्ष 1998 में X कंपनी का व्यय ₹ 200 करोड़ था तथा X कंपनी की 1998 में आय उसके वर्ष 2001 में किए गए व्यय के बराबर थी, तो वर्ष 2001 में X कंपनी की आय ज्ञात कीजिए।

उत्तर: (क)

रैखिक ग्राफ के अनुसार

1997 में Y का लाभ प्रतिशत = 35%

प्रश्नानुसार, 1997 में X का व्यय = 220 करोड़

∴ 1997 में Y की आय = (220 + 220 का 35%) करोड़

$$= \left( 220 + 220 \times \frac{35}{100} \right) \text{ करोड़}$$

$$= (220 + 77) \text{ करोड़}$$

$$= 297 \text{ करोड़}$$

(ख) माना कि प्रत्येक कंपनी की आय (1997 में) = x% रैखिक ग्राफ के अनुसार, 1997 में,

X का लाभ प्रतिशत = 45%

Y का लाभ प्रतिशत = 35%

$$1997 \text{ में X का व्यय} = \frac{x}{(100 + 45)} \times 100 = \frac{x}{145} \times 100$$

$$1997 \text{ में Y का व्यय} = \frac{x}{(100 + 35)} \times 100 = \frac{x}{135} \times 100$$

$$\text{व्यय का अभिष्ट अनुपात} = \frac{x}{145} \times 100 : \frac{x}{135} \times 100 = 27 : 29$$

(ग) दिया गया है कि

X एवं Y का 2000 में आय का अनुपात = 3:4

∴ 2000 में X की आय = 3x

तथा 2000 में Y की आय = 4x  
 रैखिक ग्राफ के अनुसार,  
 2000 में X का लाभ प्रतिशत = 65%  
 तथा 2000 में Y का लाभ प्रतिशत = 50%  
 $\therefore$  व्यय का अभिष्ट अनुपात =  $\frac{3x}{165} \times 100$  :  
 $\frac{4x}{150} \times 100$   
 $= \frac{3}{11} : \frac{2}{5}$   
 $= \frac{3}{11} \times \frac{5}{2}$   
 $= \frac{15}{22} = 15 : 22$

(घ) माना कि 1996 में प्रत्येक कंपनी का व्यय = x  
 रैखिक ग्राफ के अनुसार,  
 1996 में X का लाभ प्रतिशत = 40%  
 1996 में Y का लाभ प्रतिशत = 45%  
 प्रश्नानुसार,  
 1996 में दोनों कंपनियों की कुल आय = 342 करोड़

$$\therefore \frac{140x}{100} + \frac{145x}{100} = 342 \text{ करोड़}$$

$$\frac{140x + 145x}{100} = 342 \text{ करोड़}$$

$$\frac{285x}{100} = 342 \text{ करोड़}$$

$$285x = 342 \times 100 \text{ करोड़}$$

$$X = \left( \frac{342 \times 100}{285} \right) \text{ करोड़}$$

$$X = 120 \text{ करोड़}$$

अतः दोनों कंपनियों का 1996 में व्यय = x = 120 करोड़

$$\therefore X \text{ का लाभ} = 120 \text{ का } 40\%$$

$$= 120 \times \frac{40}{100} = 48 \text{ करोड़}$$

इसी तरह Y का लाभ = 120 का 45%

$$= 120 \times \frac{45}{100} = 54 \text{ करोड़}$$

$\therefore$  1996 में दोनों कंपनियों का कुल लाभ

$$= 1996 \text{ में } (X \text{ का लाभ} + Y \text{ का लाभ})$$

$$= 48 \text{ करोड़} + 54 \text{ करोड़}$$

$$= 102 \text{ करोड़}$$

### 13. (ङ)

दिया गया है कि

X का 1998 में व्यय = 200 करोड़

रैखिक ग्राफ के अनुसार

1998 में X का लाभ प्रतिशत = 55%

$\therefore$  1998 में X की आय = (200 + 200 का 55%)  
 करोड़

$$= \left( 200 + 200 \times \frac{55}{100} \right) \text{ करोड़}$$

$$= (200 + 110) \text{ करोड़}$$

$$= 310 \text{ करोड़}$$

$\therefore$  प्रश्न में दिया गया है कि

X कंपनी की 1998 में आय = 2001 में व्यय

$\therefore$  2001 में X कंपनी का व्यय = 310 करोड़

रैखिक ग्राफ के अनुसार

2001 में X का लाभ प्रतिशत = 50%

$\therefore$  2001 में X कंपनी की आय

$$= (310 + 310 \text{ का } 50\%) \text{ करोड़}$$

$$= \left( 310 + 310 \times \frac{50}{100} \right) \text{ करोड़}$$

$$= (310 + 155) \text{ करोड़}$$

$$= 465 \text{ करोड़}$$

प्रश्न: नीचे दी गई सूचना के आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

66वीं बीपीएससी मुख्य परीक्षा, 2021

पहली सारणी एम.बी.ए. कक्षा के उन विद्यार्थियों के प्रतिशत को दर्शाती है जिन्होंने वित्त, मार्केटिंग तथा सॉफ्टवेयर क्षेत्रों में रोजगार प्राप्त किए। दूसरी सारणी इन क्षेत्रों में रोजगार प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की औसत मासिक सैलरी (₹ में) प्रदर्शित करती है। तीसरी सारणी प्रत्येक वर्ष इन क्षेत्रों में सफल होने वाले विद्यार्थियों की संख्या को प्रदर्शित करती है।

पहली सारणी				
वर्ष	वित्त	मार्केटिंग	सॉफ्टवेयर	अन्य
1992	22	36	19	23
1993	17	48	23	12
1994	23	43	21	13
1995	19	37	16	28
1996	32	32	20	16

दूसरी सारणी			
वर्ष	वित्त	मार्केटिंग	सॉफ्टवेयर
1992	5450	5170	5290
1993	6380	6390	6440
1994	7550	7630	7050
1995	8920	8960	7760
1996	9810	10220	8640